Μάθημα 10ο

14/12/2017

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r^{(0)}=b, \quad p^{(1)}=r^{(0)}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ap^{(1)}=\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_1=\frac{(r^{(0)},r^{(0)})}{(Ap^{(1)},p^{(1)})}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$x^{(1)}=x^{(0)}+a_1p^{(1)}=\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$r^{(1)}=r^{(0)}-a_1Ap^{(1)}=\begin{bmatrix} 1-1 \\ 0+1 \\ 1-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_2=\frac{(r^{(1)},r^{(1)})}{(r^{(0)},r^{(0)})}=\frac{1}{2}$$

$$p^{(2)}=r^{(1)}+b_2p^{(1)}=\begin{bmatrix} 0+1/2 \\ 1+0 \\ 0+1/2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$Ap^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \frac{(r^{(1)}, r^{(1)})}{(Ap^{(2)}, Ap^{(2)})} = \frac{1}{1} = 1$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + a_2 p^{(2)} = \begin{bmatrix} 1/2 + 1/2 \\ 0 + 1 \\ 1/2 + 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r^{(2)} = r^{(1)} - a_2 Ap^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 - 0 \\ 1 - 1 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αφού $r^{(2)} = 0$ το $x_2$ είναι ακριβώς λύση: $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$e^{(k)} \to$ Το σφάλμα στην $k$-επανάληψη

<u>Αποτομή καθόδου</u>

$$\|e^{(k)}\|_{A^{1/2}} \leq \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right)^k \|e^{(0)}\|_{A^{1/2}}, \quad \text{όπου } \kappa = \kappa_2(A)$$

δείκτης κατάστασης

$$\|x\|_{A^{1/2}} = \|A^{1/2}x\|_2 = (A^{1/2}x, A^{1/2}x)^{1/2} = (Ax, x)^{1/2}$$

<u>Συζυγών κλίσεων</u> $\to$ είναι ταχύτερη η μέθοδος

$$\|e^{(k)}\|_{A^{1/2}} \leq 2\left[\left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1}\right)^k + \left(\frac{\sqrt{\kappa} + 1}{\sqrt{\kappa} - 1}\right)^k\right]^{-1} \|e^{(0)}\|_{A^{1/2}}$$

$$\sim \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1}\right)^k \|e^{(0)}\|_{A^{1/2}} \qquad \left(\kappa = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\right)$$

$Ax = b \Leftrightarrow M^{-1}Ax = M^{-1}b$, όπου $M$ συμμ. και Θ.Ο.
και "εύκολα αντιστρέψιμος", $\kappa(M^{-1}A) << \kappa(A)$

## Το γραμμικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,m}$, $m \le n$, $b \in \mathbb{R}^n$.
Να βρεθεί $x \in \mathbb{R}^m$, τ.ω. να ελαχιστοποιεί την ποσότητα
$\|b - Ax\|_2 = \|r\|_2$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \|b - Ax\|_2$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \|b - Ax\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{n} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)^2 =$$

$$= \min_{x \in \mathbb{R}^m} f(x)$$

θα βρω τα κρίσιμα σημεία → αναδείξα →

$$\nabla f = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} \; \frac{\partial f}{\partial x_2} \; \dots \; \frac{\partial f}{\partial x_m} \right] = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 2 \sum_{i=1}^{n} \left(b_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j\right)(-a_{ik}) = 0 \iff$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_i \iff (a_k, Ax) = (a_k, b) = (*)$$

$a_k$ η k-στήλη του $A$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^{n} (y(x))^2 = 2 \sum y(x) \frac{\partial y}{\partial x_k}$$

$$(*) = a_k^T A x = a_k^T b$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{bmatrix} a_1^T Ax \\ a_2^T Ax \\ \vdots \\ a_m^T Ax \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^T b \\ a_2^T b \\ \vdots \\ a_m^T b \end{bmatrix} \iff$$

$\iff A^T A x = A^T b$

Σύστημα κανονικών εξισώσεων.

Έστω $x \in \mathbb{R}^m$ λύση του συστήματος των κανονικών εξισώσεων και $y \in \mathbb{R}^m$

$r_y = b - Ay$, $r_x = b - Ax$

$$\|r_y\|_2^2 = (r_y, r_y) = (b - Ay, b - Ay) =$$

$$= (b - Ax - A(y-x), b - Ax - A(y-x)) =$$

$$= (r_x, r_x) - (r_x, A(y-x)) - (A(y-x), r_x) + (A(y-x), A(y-x))$$

$$= (r_x, r_x) - (A^T r_x, (y-x)) - ((y-x), A^T r_x) + \|A(y-x)\|_2^2 = \|r_x\|_2^2 + \|A(y-x)\|_2^2 \geq \|r_x\|_2^2$$

$$A^T r_x = A^T(b - Ax) = A^T b - A^T A x = 0$$

Όταν οι στήλες του $A$ είναι γρ. ανεξάρτητες τότε το $x$ είναι το μοναδικό ελάχιστο. $\iff$ $A^T A$ είναι αντιστρέψιμος

Ο $A^T A$ είναι συμμετρικός και ΘΟ. αν οι στήλες του είναι γρ. ανεξ.

Α $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$

$(A^T A x, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|_2^2 > 0$

$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$

Το πρόβλημα είναι πλήρους βαθμού (full rank)

Αν οι στήλες του A είναι γρ. εξαρτημένες τότε το πρόβλημα λέγεται ελλειπούς βαθμού.

<u>Άσκηση</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί x τ.ω. $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} \|b - Ax\|$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 8 & 20 & 16 \\ 4 & 16 & 24 \end{bmatrix}, \quad A^T b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 8 & 20 & 16 \\ 4 & 16 & 24 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ 4 & 2 & \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ & 2 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

$$LL^T x = A^T b \iff \begin{cases} Ly = A^T b \\ L^T x = y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ 4 & 2 & \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ & 2 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$y^T = [1 \ 1 \ 1]$ ; $x^T = [1 \ -1/2 \ 1/2]$

$$b - Ax = \begin{bmatrix} 1 - 3/2 \\ 1 - 1/2 \\ 1 - 1/2 \\ 1 - 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$\|b - Ax\|_2 = 1.$

## QR Ανάλυση

Αναλύουμε τον πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ : $A = QR$, όπου $Q \in \mathbb{R}^{n,m}$ ορθογώνιος πίνακας ($Q^T Q = I_m$) και $R$ άνω τριγωνικός με $r_{ii} > 0$

Λήμμα: Έστω $Q \in \mathbb{R}^{n,m}$ ορθογώνιος ($Q^T Q = I$) και $x \in \mathbb{R}^n$
Τότε $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$

$$\|Qx\|_2^2 = (Qx, Qx) = (Q^T Q x, x) = (x, x) = \|x\|_2^2$$

$$\min_x \|r\|_2 = \min_x \|b - Ax\|_2$$

Έστω ότι γίνεται η QR παραγοντοποίηση του $A$ δηλ. $A = QR$
Θεωρώ $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{n,n-m}$ ορθογώνιο που συμπληρώνει το $Q$
$[Q / \tilde{Q}]$ είναι ορθογώνιος $\in \mathbb{R}^{n,n}$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \left\| \begin{bmatrix} Q^T \\ \tilde{Q}^T \end{bmatrix} \left[ b - QRX \right] \right\|_2^2 =$$

$$= \min_{x \in \mathbb{R}^m} \left\| \frac{Q^T b - Q^T QRX}{\tilde{Q}^T b - \underbrace{\tilde{Q}^T QRX}_{0}} \right\|_2^2 =$$

$$= \min_{x \in \mathbb{R}^m} \left\| \frac{Q^T b - RX}{\tilde{Q}^T b} \right\|_2^2 =$$

$$= \min_x \| Q^T b - RX \|_2^2 + \min_x \| \tilde{Q}^T b \|_2^2$$

$$= \min_x \| Q^T b - RX \|_2^2 + \| \tilde{Q}^T b \| = \tilde{Q}^T b$$

$$Q^T b - RX = 0 \iff RX = Q^T b \iff x = R^{-1} Q^T b$$